Nachhilfestunde 1

$g_1(x) = e^{x-2}$, $h_1(x) = e^{2-x}$.

und andere

Zur Untersuchung von Exponential-Funktionen mit Zusatzaufgaben

Niveau: Grundkurs Gymnasium oder Fachoberschule

KEIN ANFÄNGERTEXT

Datei Nr. 45051

Stand 6. März. 2025

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik und Studium

https://mathe-cd.de

VORWORT

In dieser Nachhilfestunde, die in 14 Abschnitte gegliedert ist, geht es um verschobene oder gespiegelte Exponentialkurven.

Wir besprechen ausführlich grundlegende Methoden.

Wichtige Fakten werden als Grundwissen mit $\boxed{\text{GW}}$ gekennzeichnet.

Und das sind die besprochenen Themen bzw. Methoden:

$\boxed{1}$ Grundwissen: Wie verlaufen die Graphen von $g(x) = e^x$ und $h(x) = e^{-x}$

5 Kurven-Punkte sollte man wissen.

$\boxed{2}$ $y = e^{x-2}$ an der y-Achse spiegeln, und an x = 2.

$\boxed{3}$ $y = e^{-x+3}$ an x = 1 spiegeln.

$\boxed{4}$ $y = e^x$ nach $y = e^{x-2}$ verschieben.

$\boxed{5}$ $y = e^x$ nach $y = e^{x+3}$ verschieben.

$\boxed{6}$ $y = e^x$ nach $y = e^{-x-2}$ verschieben.

$\boxed{7}$ $y = e^{-x}$ nach $y = e^{-x+3}$ verschieben.

$\boxed{8}$ Regel zum Erkennen von Verschiebungen.

$\boxed{9}$ K: $y = e^{x+4}$ und H: $y = e^{-x+1}$: Schnittpunkt.

$\boxed{10}$ Schnittwinkel.

$\boxed{11}$ K an a spiegeln nach H.

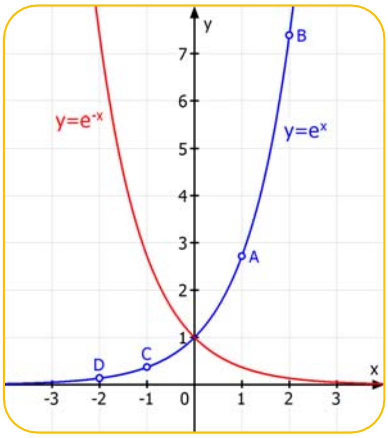
$\boxed{12}$ Fläche zwischen H, K und y = 1 berechnen.

$\boxed{13}$ Zeichnung von $r(x) = 4 - e^{2-x}$.

$\boxed{14}$ Berechnung mit Ordinatensubtraktion.

$\boxed{1}$ Wir beginnen mit ganz einfachen Exponentialfunktionen

Dazu solltest du dieses Grundwissen haben:



$\boxed{\text{GW}}$ Der Graph von und $h(x) = e^{-x}$ ist die blaue Kurve.

Folgende fünf Werte sollte man sich merken:

$e^0 = 1$, $e^1 \approx 2{,}718$, $e^2 \approx 7{,}4$, $e^{-1} \approx 0{,}4$ und $e^{-2} \approx 0{,}1$

Damit kann man die Kurve gut zeichnen.
Wichtig ist noch, dass man weiß, dass die negative x-Achse eine waagrechte Asymptote ist. Der Graph nähert sich fortgesetzt an, berührt oder schneidet sie nicht, und die gesamte Kurve steigt von $-\infty$ bis $+\infty$ mit Linkskrümmung an.

Der Graph von $h(x) = e^{-x}$ ist das Spiegelbild der Kurve $y = e^x$. Also muss man sich nichts Neues merken, sondern kann deren Schaubild unter Beachtung der Spiegelung rasch skizzieren.

Für die Untersuchung der Kurven ist ferner wichtig, dass man diese Funktionen ableiten kann:

$$g(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = e^x$$

$$h(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = -e^{-x}$$

Da e^x nie Null wird, erkennt man schnell, dass es nicht nur keine Nullstellen gibt, also keine Schnittpunkte mit der x-Achse, sondern auch keine Extrem- und Wendepunkte.

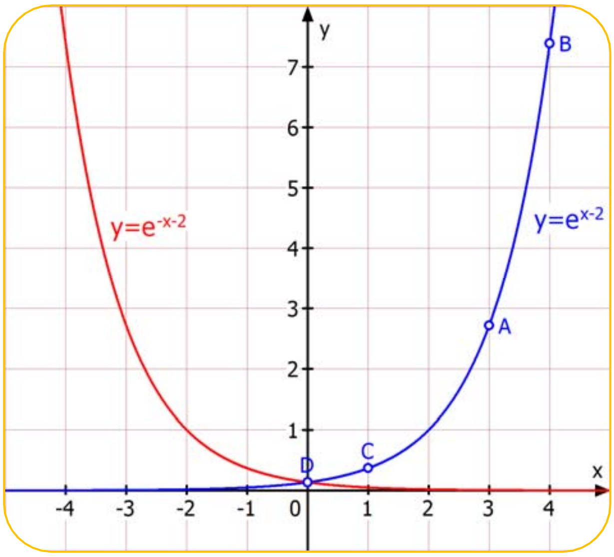
Hilft dir dieses Wissen, um aufzuschreiben, was man über die Graphen der nächsten beiden Funktionen aussagen kann?

$g_1(x) = e^{x-2}$ und $h_1(x) = e^{2-x}$

Meine Lösung findest du im Abschnitt $\Rightarrow \boxed{2}$

$\boxed{2}$ Es geht jetzt um diese Funktionen: $g_1(x) = e^{x-2}$ und $h_1(x) = e^{2-x}$.

$\boxed{GW}$ Wir haben in $\boxed{1}$ gesehen, dass die Kurven $y = e^x$ und $y = e^{-x}$ Spiegelbilder zueinander sind. Das sind sie hier auch, allerdings nicht an der y-Achse.
Ihre Schaubilder sind in der unteren Abbildung dargestellt.



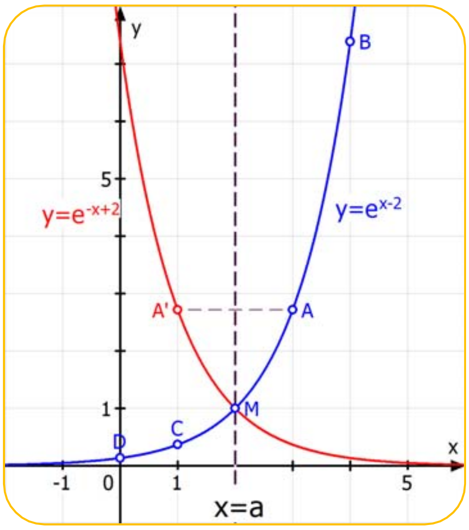
Wenn man $y = e^{x-2}$ an der y-Achse spiegelt, wird einfach nur x durch –x ersetzt.
Dann passiert folgendes:

$$\boxed{y = e^{x-2}} \xrightarrow[\text{an der y-Achse}]{\text{Spiegelung}} \boxed{y = e^{-x-2}}$$

Das ist aber nicht $y = e^{-x+2}$

Der Graph von g_1 verläuft anders:
Er entsteht durch

Spiegelung an der Geraden x = 2.



Diese kann man leicht wie folgt berechnen:
Durch Spiegelung von $A(x \mid y)$ an der Geraden x = a soll $A'(x' \mid y)$ entstehen. Beide Punkte haben dieselbe y-Koordinate. Bedingung: a ist der Mittelwert von x und x':

d. h. $\frac{x + x'}{2} = a$. Umstellen nach x:

$x + x' = 2a \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2a - x'}$.

Wir wollen an x = 2 spiegeln, d. h. es ist a = 2.

Dann folgt: $\boxed{x = 4 - x'}$. Damit spiegeln wir die Kurve $y = e^{x-2}$:

Das Spiegelbild ist dann $y = e^{\boxed{4-x'}-2} = e^{2-x'}$.

Nach der Berechnung der Bildkurve kann man die Striche wieder weglassen. Also haben wir:

$$\boxed{y = e^{x-2}} \xrightarrow[\text{an } x=2]{\text{Spiegelung}} \boxed{y = e^{4-x-2} = e^{2-x}}$$

Versuche es mal selbst:

Welche Kurve entsteht, wenn man $y = e^{-x+3}$ an der Geraden $x = 1$ spiegelt?

$\Rightarrow \boxed{3}$

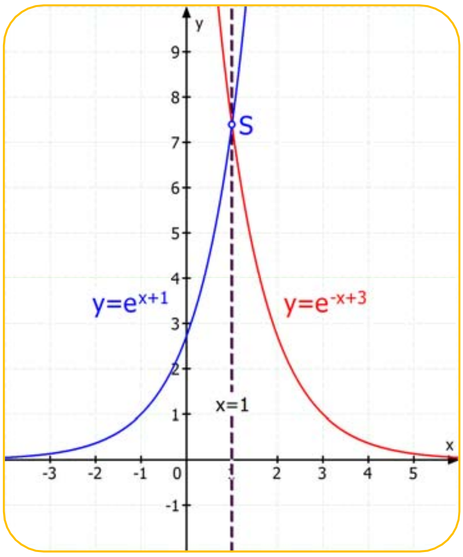
$\boxed{3}$ Um $y = e^{-x+3}$ an der Geraden $x = 1$ zu spiegeln, kann man so vorgehen:

Aus $P(x\,|\,y)$ soll $P'(x'\,|\,y')$ werden. Und es muss gelten: $\frac{x+x'}{2} = 1$ d. h. $x + x' = 2$

Also ersetzen wir $\boxed{x = 2 - x'}$. $y' = y$ bleibt erhalten:

$\boxed{y = e^{-x+3}} \xrightarrow[\text{an } x=1]{\text{Spiegeln}} y' = e^{-\boxed{2-x'}+3} \Leftrightarrow \boxed{y' = e^{1+x'}}$

Hier die Kontrolle.



$\boxed{4}$ **Nun ein ganz wichtiger Punkt.**

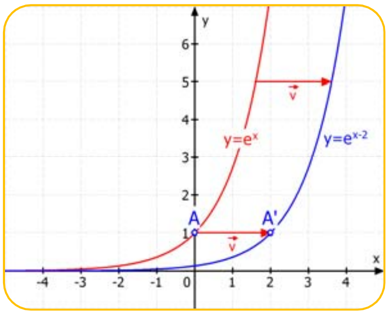
Du hast in $\boxed{1}$ erfahren, wie man $y = e^x$ mit 5 Punkten zeichnen kann. Das kann man übertragen auf Kurven mit Gleichungen wie $y = e^{x+2}$, $y = e^{-2+x}$, $y = e^{-x+1}$, $y = e^{-x-3}$

Die Summanden im Exponenten verraten uns nämlich, um welche Strecken die e^x-Kurve verschoben worden ist.

Wir untersuchen mehrere Fälle:

Im 1. Fall verschieben wir die Kurve K_o: $y = e^x$**. Das Ziel ist** $y = e^{x-2}$

Ein leicht zu merkender Punkt ist $A(0\,|\,1)$, denn es ist ja $e^0 = 1$.
Welcher Punkt von K_1: $y = e^{x-2}$ hat auch die y-Koordinate 1?
Wann also ist $y = e^{x-2} = e^0 = 1$? Antwort: Für x = 2: $A'(2\,|\,1)$
Also wurde A' um die Strecke $\Delta x = 2$ in x-Richtung verschoben.



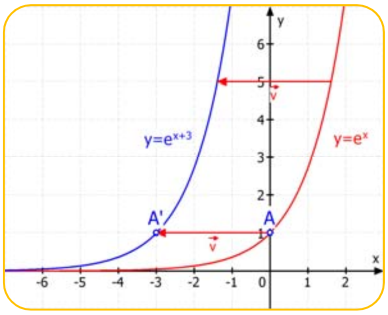
Versuche das bitte selbst:

Wie muss man K_o: $y = e^x$ verschieben, damit die Bildkurve die Gleichung $y = e^{x+3}$ ist?

$\Rightarrow$ $\boxed{5}$

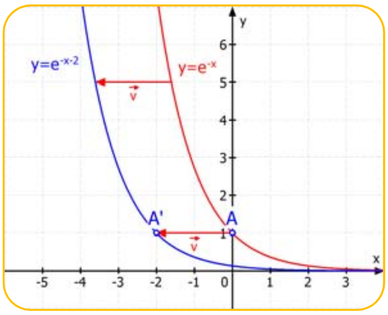
$\boxed{5}$ **Im 2. Fall verschieben wir die Kurve K_O: $y = e^x$. Das Ziel ist** $y = e^{x+3}$

Ein leicht zu merkender Punkt ist $A(0\,|\,1)$, denn es ist ja $e^0 = 1$.
Welcher Punkt von K_1: $y = e^{x+3}$ hat auch die y-Koordinate 1?
Wann also ist $y = e^{x+3} = e^0 = 1$? Antwort: Für x = -3: $A'(-3\,|\,1)$
Also wurde A' um die Strecke $\Delta x = -3$ nach links verschoben.



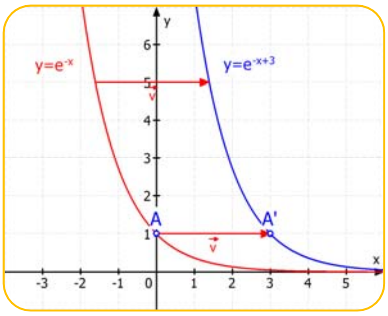
$\boxed{6}$ **Im 3. Fall verschieben wir die Kurve K_O: $y = e^{-x}$. Das Ziel ist** $y = e^{-x-2}$.

Ein leicht zu merkender Punkt ist $A(0\,|\,1)$, denn es ist ja $e^0 = 1$.
Welcher Punkt von K_1: $y = e^{-x-2}$ hat auch die y-Koordinate 1?
Wann also ist $y = e^{-x-2} = e^0 = 1$? Antwort: Für x = -2: $A'(-2\,|\,1)$
Also wurde A' um die Strecke $\Delta x = -2$ nach links verschoben.



$\boxed{7}$ **Im 4. Fall verschieben wir die Kurve K_O: $y = e^{-x}$. Das Ziel ist** $y = e^{-x+3}$.

Ein leicht zu merkender Punkt ist $A(0\,|\,1)$, denn es ist ja $e^0 = 1$.
Welcher Punkt von K_1: $y = e^{-x+3}$ hat auch die y-Koordinate 1?
Wann also ist $y = e^{-x+3} = e^0 = 1$? Antwort: Für x = 2: $A'(3\,|\,1)$
Also wurde A' um die Strecke $\Delta x = 3$ nach rechts verschoben.



Um das Ganze zu vereinfachen, hilft eine kleine Tabelle:

Urbild	Bildkurve	Verschiebung um Δx	d. h. nach
$y = e^x$	$y = e^{x-2}$	2	rechts
$y = e^x$	$y = e^{x+3}$	-3	links
$y = e^{-x}$	$y = e^{-x-2} = e^{-(x+2)}$	-2	links
$y = e^{-x}$	$y = e^{-x+3} = e^{-(x-3)}$	3	rechts
$y = e^{-x}$	$y = e^{2-x} = e^{-(x-2)}$	2	rechts

Bitte formuliere eine Regel für $y = e^{x+d}$ und eine für $y = e^{-x+d}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{8}$

$\boxed{8}$ Mit dieser Regel kann man Verschiebungen erkennen:

(1) $y = e^{x+d}$ Merkmal: Im Exponent steht +x.

Z. B. $y = e^{x+4}$ dann wird $y = e^x$ um 4 nach <u>links</u> verschoben.

$y = e^{x-4}$ dann wird $y = e^x$ um 4 nach <u>rechts</u> verschoben.

(2) $y = e^{-x+d}$ Merkmal: Im Exponent steht -x.

Dann muss man zuerst das Minuszeichen ausklammern:

Z. B. $y = e^{-x+4} = e^{-(x-4)}$ dann wird $y = e^{-x}$ um 4 nach <u>rechts</u> verschoben.

$y = e^{-x-4} = e^{-(x+4)}$ dann wird $y = e^{-x}$ um 4 nach <u>links</u> verschoben.

Man muss also die Vorzeichen genau deuten.

Eine Aufgabe für dich:

a) Zeichne die Kurven K: $y = e^{x+4}$ und H: $y = e^{-x+1}$

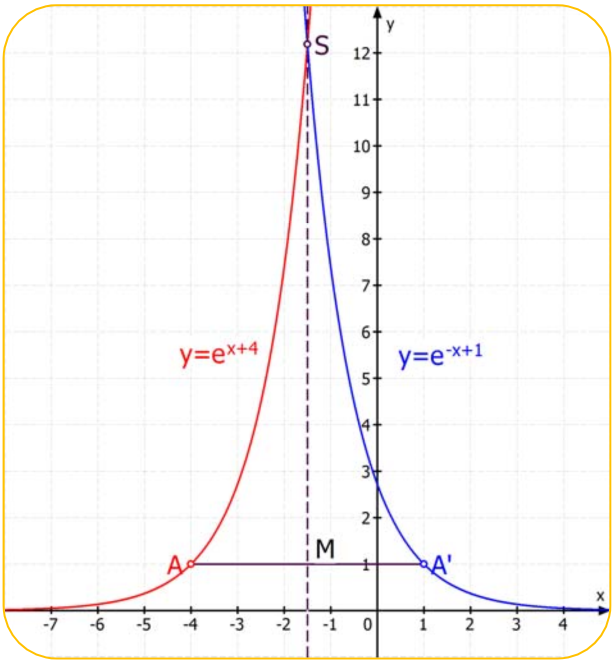
b) Berechne ihren Schnittpunkt S und dort die Schnittwinkel.

c) Zeige, dass es eine Spiegelung an einer Achse a gibt, sodass H das Bild vom K ist.

d) K, H und die Gerade $y = 1$ begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt.

$\Rightarrow$ $\boxed{9}$

$\boxed{9}$ K: $y = e^{x+4}$ und H: $y = e^{-x+1}$



a) **Schnittgleichung**: $e^{x+4} = e^{-x+1}$ (1)

$\boxed{\text{GW}}$ Es gilt die Potenzregel:

Zwei Potenzen mit gleicher Basis sind gleich, wenn ihre Exponenten gleich sind.

Aus (1) folgt also: $x + 4 = -x + 1$

$2x = -3$

$x_S = -1{,}5$

y-Koordinate: $y_S = e^{-1{,}5+4} = e^{2{,}5}$

Ergebnis: $S\left(-1{,}5 \mid e^{2{,}5} \approx 12{,}2\right)$.

b) Berechnung der Schnittwinkel bei S.

$\boxed{\text{GW}}$ Die Schnittwinkel zweier Kurven werden zwischen ihren Tangenten in S berechnet.

Die Schnittwinkelformel lautet:

$$\tan\gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

wobei m_1 und m_2 die Tangentensteigungen sind.

Rechne bitt selbst.

$\Rightarrow$ $\boxed{10}$

$\boxed{10}$

b) Berechnung der Schnittwinkel in S.

Für die Tangentensteigungen braucht man die Ableitungen:

K: $y = e^{x+4}$	$f_K(x) = e^{x+4}$	$f_K(x) = e^{x+4}$	$m_1 = f_K(-1{,}5) = e^{-1{,}5+4} = e^{2{,}5}$
H: $y = e^{-x+1}$	$f_H(x) = e^{-x+1}$	$f_H'(x) = -e^{-x+1}$	$m_2 = f_H'(-1{,}5) = -e^{1{,}5+1} = -e^{2{,}5}$

Schnittwinkel: $\tan\gamma_1 = \dfrac{e^{2{,}5} - \left(-e^{2{,}5}\right)}{1 + e^{2{,}5} \cdot \left(-e^{2{,}5}\right)} = \dfrac{2 \cdot e^{2{,}5}}{1 - e^5}$

$$\gamma_1 = \tan^{-1}\left|\frac{2 \cdot e^{2{,}5}}{1 - e^5}\right| \approx 9{,}4^\circ$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1 \approx 170{,}6^\circ$$

Beide Winkel kommen doppelt vor.

$\boxed{11}$

c) Zeige, dass es eine Spiegelung an einer Achse a gibt, sodass H das Bild von K ist.

Gegeben: K: $y = e^{x+4}$ $y = e^{-x+1}$

Auf K liegt der Punkt $A(-4 \mid 1)$, und auf H liegt $A'(1 \mid 1)$
A' ist das Spiegelbild von A. Ihr Mittelpunkt ist $M(-1{,}5 \mid 1)$

Also hat die Spiegelachse a die Gleichung x=-1,5.

d) K, H und Gerade y = 1 begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt.

Dazu brauchst du Integralrechnung.

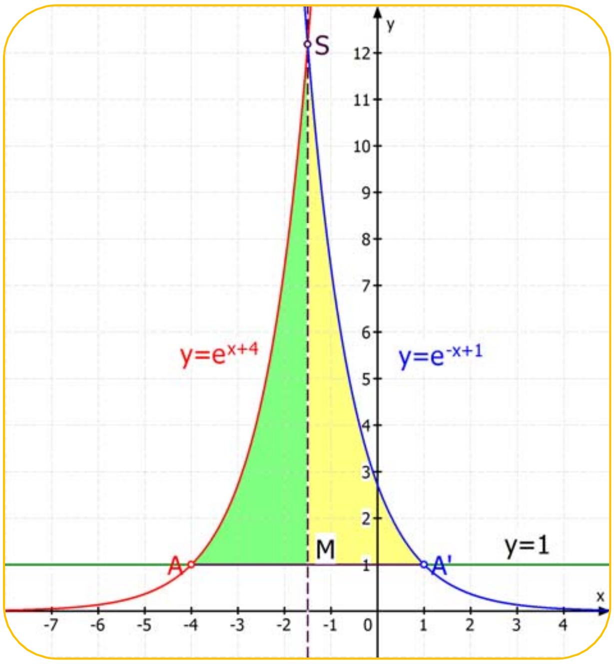
$\Rightarrow$ $\boxed{12}$

12 Weil H das Spiegelbild von K ist,

sind die beiden Teilflächen links und rechts der Achse gleich groß. Daher reicht es, eine der beiden Teilflächen zu berechnen:

$$A = 2 \cdot \int_{-1,5}^{1} \left(e^{-x+1} - 1\right) dx = 2 \cdot \left[-e^{-x+1} - x\right]_{-1,5}^{1}$$

$$A = 2 \cdot \underbrace{\left[-e^{0} - 1\right]}_{=-2} - 2\left[-e^{2,5} + 1,5\right] \approx 17,36 \ (FE)$$



13 Als letztes noch eine etwas anders aussehende Exponentialfunktion.
Solche Funktionen werden in der Nachhilfestunde 3 ausführlich besprochen:

Zeichne das Schaubild der Funktion $r(x) = 4 - e^{2-x}$.

Beginn zuerst mit den Teilfunktionen $r_1(x) = 4$ und $r_2(x) = e^{2-x}$.
Konstruiere dann aus einigen Punkten dieser Graphen Punkte der eigentlich gesuchten Kurve.

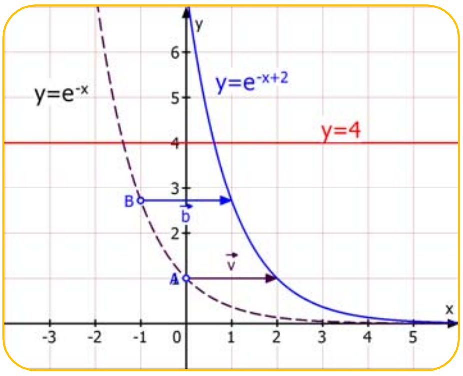
⇒ 14

$\boxed{14}$ Beginnen wir mit der Teilfunktion $r_2(x) = e^{2-x}$.

Wir haben im Laufe dieses Textes besprochen, wie man sie untersucht:

Weil vor dem x ein Minuszeichen steht, muss man dieses ausklammern:

$$r_2(x) = e^{2-x} = e^{-(x-2)}$$

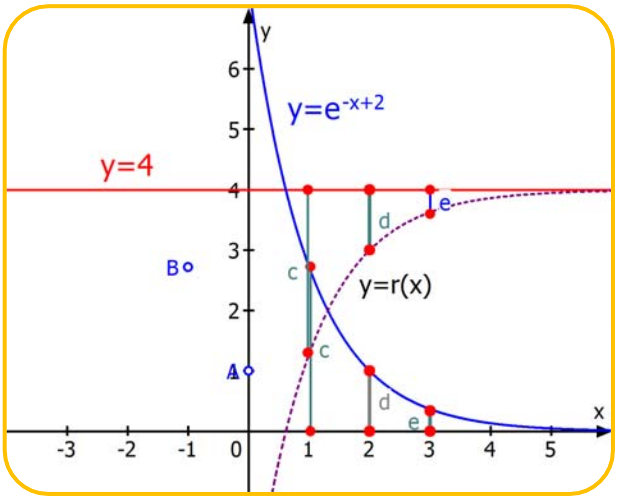


Dann erkennt man, dass diese Kurve aus $y = e^{-x}$ durch Verschiebung um 2 nach rechts entsteht:

Nun aber kommt der entscheidende Schritt.

Unsere Funktion heißt ja $f(x) = 4 - r_2(x)$.

Das heißt, wie müssen die Werte von r_2 von der waagrechte Geraden $y = 4$ subtrahieren:



Das habe ich in der Zeichnung durch kleine vertikale Strecken angedeutet:

Die unteren Strecken, die bis zur x-Achse reichen, wurden von der Geraden y = 4 subtrahiert.

Das heißt von dort gehen sie nach unten bis zur Kurve $y = r(x)$.

Dieses Verfahren nennt man Ordinatensubtraktion.

Wir sind fertig für heute!

CIAO